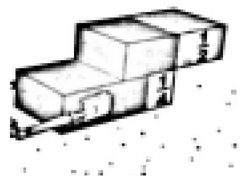
МУЗЕЙ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

Андреев Николай Николаевич
Калиниченко Михаил Александрович

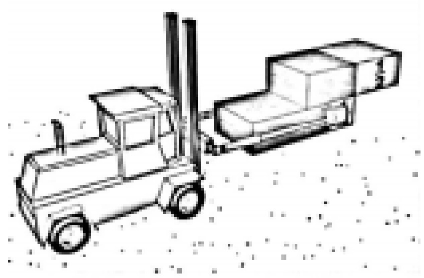
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ФИЛЬМЫ О ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ И НЕРЕШЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИКИ ФИЛЬМ ПЯТЫЙ. ЛЕСТНИЦА В БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Кадр 1–5.

В каком месте нужно взять кирпичик, чтобы он не перевешивал ни в какую сторону? Конечно посередине. Центр тяжести одного кирпича находится на средней линии. Значит, этот кирпич можно положить на другой, сместив относительно нижнего на половину длины, и он не упадет.

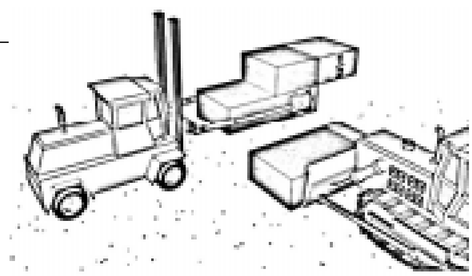


Кадр 6.



А в каком месте нужно поднимать построенную систему? Нетрудно посчитать, что центр тяжести нашей конструкции из двух кирпичей находится на прямой, смещенной на 1/4 длины кирпича. Действительно, центр тяжести верхнего кирпича проецируется на границу нижнего, такая же масса расположена посередине нижнего кирпича. Значит, центр тяжести системы находится ровно посередине половины кирпича, то есть на расстоянии 1/4 длины от края.

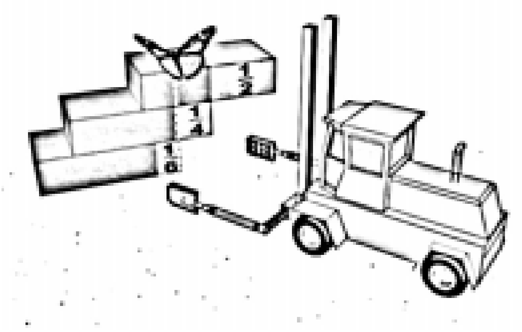
Кадр 7–8.



Трактор привозит еще один кирпич. Как мы уже посчитали, верхние два могут быть сдвинуты относительно него на одну четверть длины.

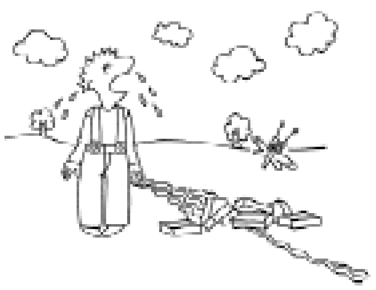
Кадр 9–11.

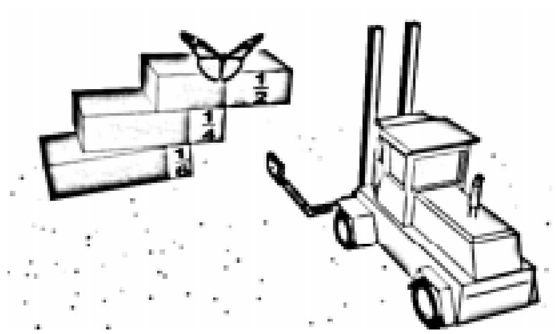
Бабочка существо легкое, погрузчику приятно поиграть с ней. Но вот она садится на кирпичи. Если она села в точку, которая проецируется на нижний кирпич, то построенная лестница не развалится.



Кадр 12–13.

Но вот она перелетела и села чуть правее, и лестница начала разваливаться. Погрузчику приходится торопиться, чтобы поддержать построенную конструкцию и не дать упасть. Это еще раз показывает, что сдвиги на 1/2 и 1/4 длины кирпичей являются максимальными, когда конструкция еще устойчива без цемента, а только под действием силы тяжести кирпичиков.

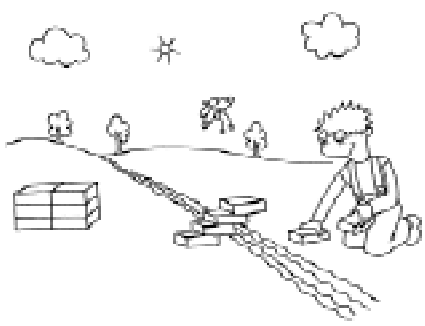




А где находится центр тяжести системы из трех кирпичей? Центр тяжести системы верхних двух кирпичей проецируется на самую границу нижнего. Его же центр тяжести находится посередине. Но теперь массы, приложенные к этим двум точкам неодинаковые – справа масса двух кирпичей, а слева только одного. Значит линия, содержащая центр тяжести системы трех кирпичей с рассматриваемыми сдвигами, делит расстояние между половиной кирпича и краем в отношении 2 : 1, считая от центра. То есть проходит на расстоянии 1/6 длины кирпича от края.

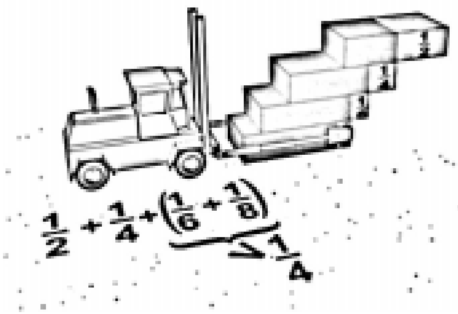
Кадр 14.

Таким методом можно посчитать, что, не желая пользоваться цементом, мы можем строить лестницу, сдвигая систему из верхних n кирпичей относительно края нижнего на $1/2n$ длины кирпича. Так мы и будем строить, получая на каждом шаге максимальный возможный сдвиг по горизонтали.



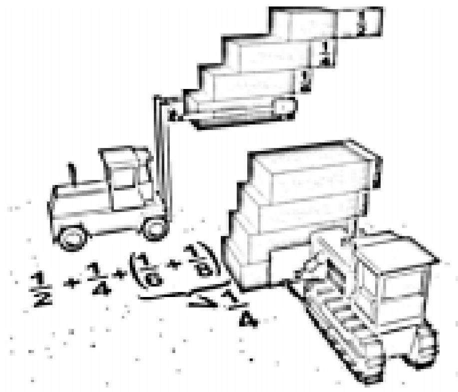
Кадр 15–20.

Рассмотрим первые сдвиги уже построенной лестницы. Это 1/2, 1/4, 1/6, 1/8. Не трогая первые два члена, сгруппируем 1/6 и 1/8, как математики говорят, в «блок». Задвинем верхний кирпичик так, чтобы все сдвиги в блоке были одинаковые и равнялись наименьшему, то есть 1/8. Тогда суммарный сдвиг получится 2 · 1/8 = 1/4. Таким образом, сдвиг по горизонтали, даваемый этим блоком, больше (мы же задвигали один кирпичик) 1/4 длины кирпича.



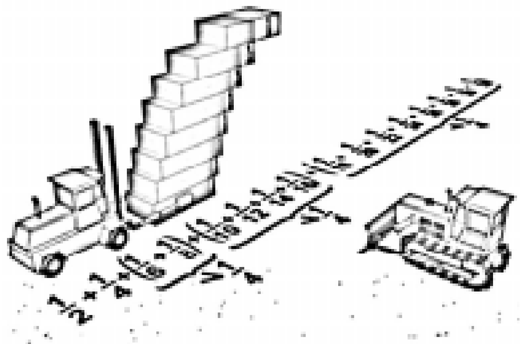
Кадр 21–23.

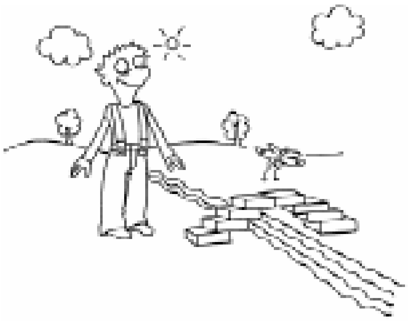
Как разбивать на блоки нашу лестницу – это мы решаем сами. И следующий блок, который мы рассмотрим, будет состоять из четырех кирпичиков. Это даст нам общий сдвиг на 1/10 + 1/12 + 1/14 + 1/16. Чтобы оценить сдвиг в каждом блоке, будем поступать одинаково. Повторим действие, сделанное в первом блоке: задвинем верхние кирпичики так, чтобы их сдвиг равнялся наименьшему в блоке. Получим, что к горизонтальной длине лестницы 4 раза прибавляется по 1/16, то есть 4 · 1/16 = 1/4 длины кирпича. Значит, сдвиг по горизонтали, даваемый этим блоком, тоже больше 1/4 длины кирпича.



Кадр 24.

Вы уже усмотрели общую схему? Следующий блок будет состоять из 2^3 кирпичиков, и наименьший сдвиг будет на $1/2^5$ длины кирпича. Соответственно, общий сдвиг, даваемый этим блоком, будет тоже больше $1/4 = 2^3 \cdot 1/2^5$.





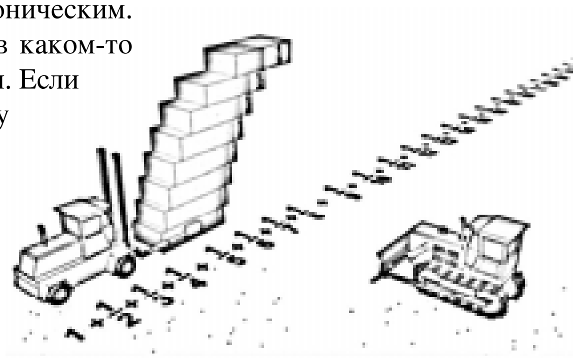
Кадр 25.

Таким способом можно разбить всю нашу лестницу на блоки. Блок с номером n будет состоять из 2^n кирпичиков, и наименьший сдвиг в нем будет на $1/2^{n+2}$ длины кирпича. Общая длина блока будет больше, чем $2^n \cdot 1/2^{n+2} = 1/4$.

Кадр 26–27.

Домножим каждый член ряда на 2, а затем сократим дроби. Мы получим ряд 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + ... + 1/n + ...

Этот ряд называется гармоническим. Он играет большую роль и в каком-то смысле является пограничным. Если вы будете строить лестницу (уже с использованием цемента) со сдвигами большими чем 1/n (то есть в знаменателе будет стоять число меньше n), то такая лестница уйдет по горизонтали на бесконечность.



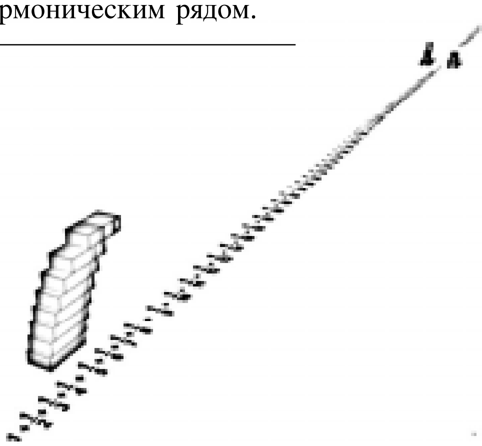
В математике подобное свойство называют расходимостью ряда – какое бы не было задано наперед большое число, всегда можно взять столько членов ряда, что их сумма будет больше заданного числа. Один из критериев расходимости – сравнение с гармоническим рядом.

Кадр 28.

Удаляясь, машинки беседуют:

– Удивительно, неужели лестница окажется и над этим местом?

– Мы же показали, что можно взять сколь угодно много блоков, каждый по длине больше 1/4 длины кирпича...



***Кадр 29.* Литература**

В.А. Уфнаровский. Математический аквариум. Кишинев: Штиница, 1987. 216 с.

***Кадр 30.* Титры**

Идея фильма: Николай Андреев, Сергей Коновалов.

Мультипликация: Михаил Калиниченко.

Андреев Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный сотрудник
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,

Калиниченко Михаил Александрович,
художник проекта.